Flux du champ électrostatique – Théorème de Gauss

I Théorème de Gauss

On considère une surface élémentaire : $d\vec{S} = dS.\vec{n}$ avec $\vec{n}$ vecteur normal à la surface.

Le flux élémentaire du champ $\vec{E}$ à travers $d\vec{S}$ est : $d\Phi = \vec{E}.d\vec{S}$

Si la surface est fermée, $d\vec{S}$ est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur. Et $\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S}$

Théorème :

On considère une distribution de charge D et une surface fermée S

Le flux du champ $\vec{E}$ créé par D à travers S est égal à la charge de D contenue dans S divisée par ε_0

$$\rightarrow \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

II Calcul de $\vec{E}$ à l'aide du théorème de Gauss

1) Champ créé par un fil infini

Surface de Gauss : cylindre d'axe z, de rayon R et de hauteur h, passant par M

Surface latérale : $\vec{E}(r)$ à la même valeur en tout point de la surface latérale et :

$$\Phi_{lat} = E(r).S_{lat} = E(r)\times 2\pi rh$$

les autres surfaces donnent $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$

Le théorème de Gauss donne : $E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

2) Champ créé par un plan infini

Surface de Gauss : un cylindre tel que M soit sur une de ses faces (dessus ou dessous) et symétrique par rapport au plan infini. $\Phi_{lat} = 0$ car $d\vec{S} \perp \vec{E}$

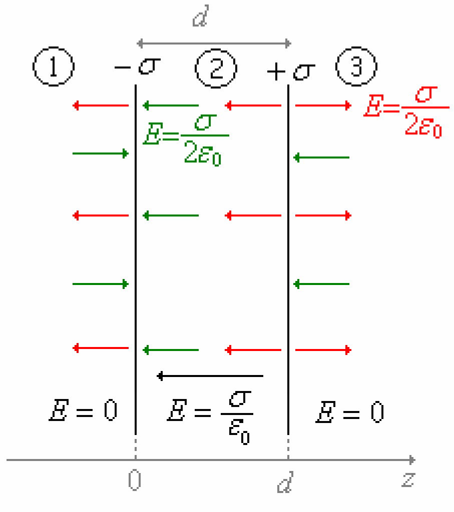
$\Phi_1 = \iint_1 E(z)dS = E(z)S$ et $\Phi_2 = E(z)S$

d'où : $\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{lat} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Soit : $2E(z)S = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ et $\boxed{E(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

Le champ créé des 2 cotés du plan infini sont égaux en valeur absolue quelque soit la distance du point M.

3) Condensateur plan



Deux plans infinis uniformément chargés et séparés par une distance d

En 1 et 3 les champs sont opposés → $E_1 = E_3 = 0$

En 2 :

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

d'où $E(z) = \dfrac{-\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{-dV}{dz}$ d'où $V(z) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} z + V_0$

Expression de C (capacité du condensateur) en fonction de d et de la surface des armatures :

$$\boxed{C = \frac{S\varepsilon_0}{d}}$$

➔ unité de ε_0 : $F.m^{-1}$

III Analogie avec le champ de gravitation

Analogies

Electrostatique		Gravitation
$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$	<->	$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}$
q	<->	m
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	<->	- G
$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$	<->	$\vec{\mathcal{G}} = \frac{\vec{F}}{m}$
$\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	<->	$\oiint \vec{\mathcal{G}}.\, d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$

(Equivalent du théorème de Gauss ➔ application à l'étude des planètes.)
De cette manière on calcule la force exercée par une planète sur une autre. On retrouve l'expression en posant que la Terre est considérés comme un point affecté de M_T, masse totale de la Terre.